



I RAPPORTI
CHE I POLIGONI REGOLARI

UNO DI UN LATO PIÙ DELL' ALTRO

INSCRITTI, E CIRCOSCRITTI

HANNO FRA ESSI ED IL CERCHIO

COL MEZZO DEI QUALI SI OTTENGONO PROPORZIONI

CHE DANNO LA SOLUZIONE GEOMETRICA DI PROBLEMI

TENUTI PER INSOLUBILI.

SCOPERTA

DI GIAMBATISTA MALACARNE

DI VICENZA

Quærite et invenietis.
J. C.



VICENZA

TIPOGRAFIA DI G. TRAMONTINI

1855.

se fosse sbagliata. Al caso che valenti Scienziati la trovassero esatta, appoggiato allora da sì rispettabili autorità, potreste divulgarla senza timore di rendervi ridicolo.

Se mai vi fossero premj attaccati a siffatta scoperta, trovereste in quel caso nelle Accademie onorevoli, giusti ed imparziali difensori che reclamerebbero a vostro favore quelle ricompense che dal tempo fossero state dimenticate.

Non vi curate se qualche invidioso attribuir volesse all'azzardo il vostro ritrovato, per toglervi il merito di una lunga fatica. Avvezzo come siete ai sarcasmi, alle calunnie; avvezzo ad essere trattato da maniaco, da mentecatto: non rispondete! Lasciate gracchiar i corvi e gracidar le rane. Il loro schiamazzo si perderà nel vuoto, e col tempo le persone scientifiche e capaci vi difenderanno.

La più breve e la più giusta confutazione de' vostri passati errori trovasi nella presente soluzione che io ritengo infallibile. Con questa voi concorrerete a guadagnar il premio da voi proposto nella Gazzetta Uffiziale di Venezia li 11 Luglio 1854.

La verità, ch'è una emanazione di **DIO**, *non avrebbe bisogno per esser tale delle approvazioni dei Professori o degl'Istituti; ma questi diventano il veicolo per meglio diffonderla. Il cambiamento del titolo potrà indur qualcheduno a leggervi, e se fra questi alcun fosse convinto ciò non basterebbe ancora pel Pubblico, che desidererebbe un solenne giudizio delle Accademie. Operate a mio modo e resterete contento. Addio.*

Venezia 12 Dicembre 1854.

Il vostro sincero Amico e Collega
all'Università di Padova
ANTONIO Dott. C....

A questa lettera l'Autore rispose coll'invio del presente Opuscolo.

DISCORSO PRELIMINARE

In geometria tutto quello che non è assurdo o contraddittorio è possibile, e una cosa possibile è reale quando non si può negarla senza cadere in contraddizione. Il medesimo spazio rinchiuso da un triangolo equilatero, da un quadrato, da un poligono regolare qualunque, in una parola da un circolo, è concepibile e non presenta alcuna assurdità. Ha dunque un' esistenza di fatto e mi propongo di dimostrarlo. Determinare il lato di un quadrato equivalente ad un cerchio, e quindi rettificare la circonferenza può essere estremamente difficile: ma il difficile non è impossibile.

Molti Geometri, varj Corpi Scientifici, e alcuni Accademici Istituti ricusando di esaminare le soluzioni del problema della QUADRATURA DEL CIRCOLO sembrano ammetterne la impossibilità. Per quanto sia il rispetto che si debba alle decisioni di questi Dotti elleno non sono dogmatiche, e si può dubitarne senza peccar di eresia.

Sino ad ora si è cercato la soluzione di questo problema in molte maniere senza alcun successo; ma si son forse esaminati tutti i rapporti che i poligoni regolari uno di un lato più dell' altro iscritti e circoscritti, possono aver fra essi ed il cerchio per istabilire sufficientemente questa pretesa impossibilità? Ammessa la periferia incommensurabile rapporto al suo diametro aritmeticamente, ne deriva che debba esserlo anche geometricamente? Perchè limitarsi

a cercar in numeri questo rapporto, se la Geometria può darcene uno più facile in linee?

Quasi tutti i Geometri cominciando da Archimede si sono occupati di cercare il rapporto numerico del diametro alla circonferenza. Egli è dimostrato che se si conoscesse, la media proporzionale del raggio alla semi-periferia rettificata, sarebbe il lato del quadrato equivalente al cerchio. Tutti gli sforzi dei più grandi Matematici e dei più assidui Algebristi dei nostri tempi si sono ridotti ad approssimarsi quasi all'infinito; ma alcuno ancora non è arrivato a dare in numeri o in linee un rapporto preciso. Lo confesso: il rapporto in numeri mi ha sempre paruto impossibile, non per altro in linee. In effetto: concepiscasi due poligoni regolari uno inscritto e l'altro circoscritto al cerchio; più i loro lati duplicandosi aumenteranno in numero e più i poligoni si avvicineranno al circolo, ma non arriveranno mai a confondersi. Servendomi di un triangolo equilatero e di un quadrato iscritti in un cerchio, pervengo, quadrando il triangolo, a trovare un terzo quadrato equivalente al cerchio.

La soluzione analitica di questo problema avendo fino ad ora resistito alla forza prodigiosa del calcolo infinitesimale, impiegato da tanti celebri Geometri che si avvicinarono al loro scopo senza esservi pervenuti, non poteva che scoraggiarmi, ed ho abbandonato un sentiero che mi presentava ostacoli sì numerosi e sì difficili. Limitato qual io mi sono nella sfera delle mie conoscenze, non potendo spingere il calcolo così lungi come lo fecero i più pazienti e i più infaticabili Algebristi, ho voluto cercare se in qualche altra maniera potessi venirne a capo.

Ho sempre risguardato la Ciclometria aritmetica come avente la doppia proprietà di rettificare la circonferenza e di darne il rapporto col diametro. Egli è

probabile che se si perviene a render retta la periferia in una maniera qualunque, non si avrà per questo un rapporto numerico esatto perchè forse questo rapporto non esiste; ma sarà bensì vero che si avrà una retta uguale alla circonferenza nel modo stesso che si trova la radice del due o la radice del tre di un quadrato senza che si conosca il rapporto col suo lato, ovvero nella maniera che si divide una linea in media ed estrema ragione senza poterne dare il rapporto numerico. La Geometria degli antichi che dà rigorosamente un quadrato doppio o multiplice di un altro, ciò che non fa l'analisi de'moderni, mi ha sembrato convenire perfettamente alle mie ricerche.

Siccome gli apotemi dei poligoni regolari sono il più delle volte incommensurabili coi loro perimetri; così la soluzione del problema può esser impossibile analiticamente e possibile geometricamente secondo che i Matematici la vogliono considerare.

La maniera degli antichi di cui mi servo non è, a mio credere, che un'analisi per raziocinio sopra delle figure, come l'Algebra lo è per dei segni sopra delle quantità. La prima esponendo delle proposizioni dimostra per una catena di ragionamenti che esigono sempre un' attenzione non interrotta la verità dell' enunciato e le conseguenze che se ne vogliono dedurre; la seconda per delle formule, che risparmiano sì bene gli sforzi del nostro spirito, ci dà come per incanto le soluzioni che si domandano.

Alla vista della luminosa chiarezza che il più delle volte accompagna le dimostrazioni geometriche degli antichi, non posso astenermi da alcune riflessioni. Mi sembra che sarebbe da desiderarsi che fosse un poco meno trascurata dai moderni che la massima facilità dell' analisi algebrica getta di più in più in una estremità viziosa. Questo abuso ha già eccitato la dispiacenza di molti Geometri di primo ordine come Newton,

Fermat, Maclaurin, Montucla che si sono lagnati del torto che faceva all'eleganza geometrica questa maniera di ridur tutto a calcolo. In effetto il metodo degli antichi ha certi avvantaggi che non gli possono esser ricusati da quelli che lo conoscono un poco. Sempre luminoso spande la chiarezza nel tempo stesso che produce la convinzione, in luogo che l'analisi algebrica convincendo lo spirito non vi porta alcun lume. In questo si conoscono distintamente tutti i passi che si fanno; nessun legame tra il principio e l'ultima delle conseguenze non iscappa alla intelligenza: nell'altra tutti i gradi intermedj sono in certo modo soppressi, e non si è convinto che pel concatenamento legittimo che si sa regnare nel meccanismo delle operazioni che formano una gran parte della soluzione.

Son ben lontano dal non riconoscere la superiorità dell'analisi moderna riguardo alla Geometria degli antichi. Non ho preteso biasimare che l'abuso di applicare il calcolo a dei casi ove un poco più di attenzione e di conoscenza in Geometria fornirebbero delle soluzioni molto più soddisfacenti per lo spirito. Perchè siccome non ci serviamo del quadrante per misurare un oggetto che si ha sotto mano; così non si dovrebbe impiegare il calcolo algebrico in quelle questioni ch'è superfluo. Ma bisognerebbe ignorare le sublimi scoperte della Geometria moderna per contestare la necessità assoluta di questo calcolo nelle ricerche di una certa natura, come quelle che occupano oggidì i nostri Geometri. In vano lo spirito il più laborioso e il più capace di attenzione e di meditazione si sforzerebbe di dispensarsi da questo soccorso; i rapporti che si trattano di sviluppare in queste ricerche sono sì complicati che abbisognerebbero per isvolgerli delle intelligenze di un ordine superiore al nostro. Usiamo dunque per iscoprire la verità delle potenti risorse che ci presentano questi metodi alla perfezione

dei quali ogni nostra cura deve essere rivolta. Sono i soli da cui la Geometria e la Fisica devono d'or innanzi aspettare dei veri progressi.

Queste riflessioni furono fatte avanti di me.

Poco importa che risguardar si voglia la soluzione di questo problema come sintetica o come analitica, secondo che si monta dal particolare al generale o che si discende dal generale al particolare; l'essenziale è che sia geometrica, e che si possa ottenere coll'ajuto della regola e del compasso. La mia maniera dà esattamente la semi-periferia rettificata, trovando una terza proporzionale al raggio del cerchio ed al lato del quadrato che gli è equivalente, senza che si possa assegnare in numeri il suo rapporto col raggio. Ma il problema non è forse risoluto per questo? È egli necessario in Geometria di dare il rapporto numerico tra l'altezza di un triangolo qualunque e la metà della sua base, perchè la soluzione del problema che ha per oggetto di trovare il lato di un quadrato equivalente sia rigorosa? Alla fine, a che serve il rapporto in numeri del diametro alla periferia se non a rettificarla, e se si perviene a questo senza conoscerlo egli diventa inutile. Ora si può dire: sia che si conosca numericamente questo rapporto, sia che s'ignori, la questione non cambia; perchè l'ultima operazione di cercare la media proporzionale, ch'è il lato del quadrato, si farà sempre geometricamente, e col mio metodo si trova direttamente senza altre operazioni.

Se si crede a Diogene Laerce, quando Pitagora dimostrò che il quadrato costruito sopra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati costruiti sopra i due altri lati di questo triangolo, nell'eccesso della sua gioia sacrificò in onore di questa scoperta cento vittime alle Muse per essere stato sì bene ispirato. Quando si ha solamente percorso le differenti parti delle Matematiche bisogna

convenire che questa proposizione è di un gran soccorso. Ma come Pitagora ha egli veduto gli avvantaggi che ne dovevano risultare? Aveva egli trovato per lo avanti un gran numero di proposizioni fondate sopra questa, e che non aspettavano che una tale scoperta per essere messe elleno pure nel numero delle grandi verità? La storia non ne parla. Io concepisco facilmente la gran sensibilità di Pitagora al momento della sua scoperta; essa gli rende una testimonianza non equivoca della forza del suo genio. Ma un'ecatombe eseguita dall'inventore della metempsicosi mi sembra una riconoscenza estrema.

Non si dica, che la soluzione del problema della Quadratura del Circolo sia più curiosa che utile, perchè arriva lo stesso di tutte le scoperte, e non se ne conosce l'utilità che quando s'incomincia a farne le applicazioni convenevoli. Egli è certo che la soluzione di vari altri problemi vi è attaccata, e che la pratica guadagnerà molto. La nuova strada che apre alla Geometria potrà condurla ben lunge, e l'analisi algebrica guidata da tale verità farà non attesi progressi. La mia perseveranza, anzi la mia ostinazione, non il sapere, ha strappato alla scienza il nascosto segreto. Questa scoperta fa voltar carta al gran libro delle matematiche, ove si leggerà gl'involuti arcani della scienza. È un nuovo fondamento all'antico edificio che qualche genio dotato di penetrazione potrebbe ingrandire. Non si può in un colpo d'occhio vedere l'ammirabile concatenamento che esiste fra tutte le verità, e non è che per gradi che ci è dato di conoscerlo. Mi riservo di farne l'applicazione per lo scioglimento d'altri problemi non meno difficili che importanti.

RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

A rischiarimento di quanto sarò per dire, convien premettere alcune proposizioni talmente evidenti per se stesse che basterà esprimerle per esser concepite senza altre dimostrazioni.

Un triangolo equilatero iscritto in un cerchio è il più picciolo fra i poligoni regolari, il quadrato che lo segue è più grande del triangolo, il pentagono regolare maggiore del quadrato, l'esagono regolare maggiore del pentagono e così via via sino all' infinito. Si avrà quindi una serie di corde, lati dei poligoni che misureranno archi sempre minori a proporzione che i poligoni aumenteranno sempre di un lato l'antecedente. Quindi tanto gli apotemi, quanto i perimetri di questi poligoni aumenteranno sempre, sino che l'ultimo apotema sarà eguale al raggio del cerchio e l'ultimo perimetro alla circonferenza. Questo risguarda i poligoni regolari iscritti; in quanto poi ai poligoni regolari circoscritti la cosa è diversa. Le aree dei poligoni regolari circoscritti allo stesso cerchio crescono a proporzione che diminuiscono i lati: per esempio, l'esagono regolare circoscritto val meno del pentagono, il pentagono meno del quadrato, ed il quadrato meno del triangolo equilatero, ultimo e più semplice dei poligoni circoscritti.

convenire che questa proposizio
corso. Ma come Pitagora ha egl
che ne dovevano risultare? A
avanti un gran numero di pr
questa, e che non aspettav
per essere messe elleno pr
verità? La storia non ne
mente la gran sensibili
della sua scoperta; ess
non equivoca della fo
tombe eseguita dall' ir
sembra una riconos

Non si dica, ch
QUADRATURA DEL C
perchè arriva lo
se ne conosce l
farne le applica
soluzione di va
la pratica guad
alla Geometri
algebrica gu
si. La mia
il sapere, h
Questa s
matemat
scienza.
qualch
dire. P
rabil
non
ris
d'

...goni regolari uno di un
... circoscritti al medesimo
...ato equivalente al minor po-
...ato del quadrato equivalente
...no di un lato di più; come il
...uesto, sta al lato del quadrato
...; come il lato del quadrato equi-
...a al lato del quadrato equivalente
...itto di un lato di più; come questo
...adrato, sta al lato del quadrato equi-
...no circoscritto di un lato di meno. Si
...sta proporzione: l'area del poligono
...ato di meno, starà all'area di un poli-
...i un lato di più; come questa al cerchio;
del cerchio, a quella del poligono circo-
...n lato di più; e come quest'ultima all'area
...gono circoscritto di un lato di meno.

...rciocchè le aree dei poligoni regolari essendo
...ali ai rettangoli dei loro apotemi multiplicati per
dei loro perimetri; quando gli apotemi che deter-
...o i poligoni regolari, avessero fra essi una propor-
..., anco i perimetri o le loro metà dovranno esser
...rzionali; di modo che conoscendo la proporzione
... apotemi dei due poligoni iscritti uno di un lato più
...'altro, questa darà la proporzione della metà dei peri-
...tri, e mettendo queste differenti metà ad angolo retto,
... terza proporzionale che si troverà sarà la metà del pe-
...imetro del cerchio o la metà della circonferenza. Questa
metà sarà proporzionale alla metà del perimetro del poli-

gono circoscritto di un lato di più, e questa, proporzionale alla metà del perimetro di un poligono circoscritto di un lato di meno. In questo caso la proporzione degli apotemi [illegible] due poligoni è di perfetta eguaglianza, essendo questi [illegible]mi raggi del medesimo cerchio.

[illegible] può render più chiara, con poligoni determinati [illegible] la dimostrazione dell'esposto teorema generale. [illegible] (vedi la tavola) un triangolo equilatero iscritto [illegible] *t q r* un quadrato di un lato di più del triangolo, [illegible]o nello stesso cerchio. L'apotema CA del triangolo [illegible]latero è la metà di CF apotema del cerchio DEF. [illegible]scritto ora un semicerchio col diametro AF, la sua circonferenza taglierà la perpendicolare CB nel punto V e darà CV media proporzionale eguale alla metà del lato del quadrato *t q*. Perchè, se CV è media proporzionale, il suo quadrato deve essere equivalente al rettangolo di CA multiplicato per CF; ma questo rettangolo è doppio del quadrato di CA ed equivale al quadrato della media proporzionale CV. Dunque CA, sta a CV; come CV, sta a CF.

Cercando ora il lato del quadrato equivalente al triangolo equilatero iscritto DEF, si avrà col trovare la media proporzionale fra la metà del suo perimetro ed il suo apotema; cioè si porti per diritto all'apotema CA tre metà del lato del triangolo equilatero sino in S e descritto col diametro AS un semicerchio, la sua circonferenza taglierà alla perpendicolare CN, CX che per esser media proporzionale, il suo quadrato sarà equivalente al rettangolo di AC multiplicato per CS. Se si volesse trovare il lato del quadrato iscritto, il cui apotema fosse CG, si porterà quattro metà del lato del quadrato iscritto sopra la retta C*u* sino in L e col diametro di queste quattro metà più l'apotema CG, si descrivi la semicirconferenza GOL che taglierà la perpendicolare CN nel punto O, per cui CO media proporzionale, quindi lato di un quadrato eguale all'iscritto. Portando dunque CX in CY, restando CO, si unisca YO e tirata sopra YO la perpendicolare OM sino che incontri CS; si avrà il triangolo rettangolo YOM che

avrà CY lato di un quadrato equivalente al triangolo equilatero iscritto, CO lato del quadrato iscritto e media proporzionale, e CM terza proporzionale, lato del quadrato equivalente al cerchio. Perchè essendō proporzionali i tre apotemi ed entrando i due primi nella formazione dei rettangoli o dei rispettivi quadrati, anche il terzo rettangolo deve esser proporzionale agli altri due, come deve esserlo il terzo quadrato.

Qualunque siasi la proporzione degli apotemi, quello del cerchio CF, restando sempre il medesimo, tutte le semicirconferenze il cui diametro sia fra FA ed FT daranno differenti apotemi, sì pei triangoli equilateri, come pei quadrati. Per esempio: la semicirconferenza FIG ha per prima proporzionale l'apotema CG del triangolo equilatero di HK, per media CI apotema del quadrato di BQ e per terza CF raggio del cerchio. Egli è chiaro che la presente proporzione non è quella del quadrato e del triangolo equilatero iscritti, nè quella di tutte le altre; ma dà costantemente la stessa terza proporzionale, il raggio del cerchio. Ne segue da tutto questo che il triangolo equilatero che ha per apotema CG, sta al quadrato che ha per apotema CI; come questo al cerchio. Il lato del triangolo equilatero ZU che ha per apotema CT, raggio del cerchio circoscritto, ed il lato del quadrato *m n* che ha per apotema CB raggio del cerchio circoscritto dal quadrato, e CF apotema o raggio del cerchio; questi tre raggi sono fra essi eguali e la proporzione corrispondente è questa: che il triangolo equilatero che ha per apotema CT e per lato ZU, la sua area, sta all'area del quadrato di *m n* che ha per apotema CB; come l'area di questo quadrato, all'area del cerchio che ha per apotema il raggio CF.

Ciò che si è detto e dimostrato del triangolo equilatero e del quadrato iscritti, uno di un lato più dell'altro; si può dire del quadrato e del pentagono regolare di un lato di più del quadrato, iscritti nel medesimo cerchio; e così d'ogni poligono regolare iscritto di un lato più dell'altro, proporzionando le aree danno questa proporzione: l'area di un poligono di un lato di meno, sta all'area

dell'altro poligono di un lato di più; come questa al cerchio. Di modo che: il poligono regolare minore, sta al poligono regolare maggiore iscritti; come questo ultimo, al cerchio; come il cerchio al poligono regolare circoscritto di un lato di più, e come questo ultimo al poligono regolare di un lato di meno: come in altro luogo si è detto.

Egli è evidente che se due poligoni regolari, sì circoscritti, che iscritti al cerchio uno avrà un lato più dell' altro, trovando a cadaun poligono il suo quadrato equivalente e proporzionando i lati di questi quadrati, se ne troverà un terzo equivalente al cerchio.

Si vede chiaramente che se si avrà la proporzione degli apotemi, siccome il diametro del cerchio che la fa ritrovare può variare da FA ad FT, queste proporzioni devono essere infinite e tutte daranno per risultamento la maniera di quadrare il cerchio. Egualmente la proporzione delle metà dei perimetri; per esempio, quella che ha SA per diametro, varia all'infinito, potendo il diametro diventare T *u*, dovendo le circonferenze tagliar tante medie proporzionali quanti sono i punti da X in N. Anco per le metà dei perimetri, quando se ne conoscono due si può trovare la terza. Sia CS la metà del perimetro del triangolo equilatero DEF, e sia CL la metà del perimetro del quadrato *p t q r*. Ora mettendo ad angolo retto CS con CL, la terza proporzionale che si troverà sarà C *u* eguale alla semicirconferenza FDT; e quindi la media proporzionale CN, lato del quadrato equivalente al cerchio EFD. Dunque CS sta a CL, come CL a C *u*.

MANIERA
D'ISCRIVERE E CIRCOSCRIVERE AD UN CERCHIO UN POLIGONO DI QUALUNQUE SIASI NUMERO DI LATI.

Per una conseguenza di quanto si è esposto ne risulta che si può iscrivere e circoscrivere ad un cerchio un poligono regolare di qual si voglia numero di lati. Volendo descrivere un ettagono regolare: eccone il modo. L'apotema del lato di un ottagono regolare iscritto, sarà la media

proporzionale dell' apotema del cerchio coll' apotema dell'ettagono regolare. Per aver un enneagono; si proporzionerà l'apotema del decagono regolare iscritto coll'apotema del cerchio ed il terzo apotema sarà quello dell'enneagono regolare iscritto; e così di qualunque altro poligono regolare.

Le proporzioni degli apotemi dei poligoni regolari iscritti son tante quanti sono i poligoni; così pure le proporzioni dei rettangoli delle metà dei perimetri pegli apotemi, sono tante quanti sono i poligoni; quindi tante, quanti sono i quadrati delle medie proporzionali fra le metà dei perimetri cogli apotemi. Quindi la proporzione degli apotemi fra essi, non è quella delle metà dei perimetri; nè questa, quella dei quadrati delle medie.

Ecco sciolto in infinite maniere e colla Geometria elementare, mediante certe proporzioni, il tanto cercato problema della QUADRATURA DEL CIRCOLO che fu la barriera insormontabile di tanti celebri Geometri. Gli sforzi sostenuti per secoli dalle più colte nazioni, i vistosi premj da queste proposti non valsero per isvolgerlo. Il problema era passato per insolubile. Si rideva di colui che ne tentava lo scioglimento, ed io così deriso, persuaso mai sempre che a tal effetto bastava la semplice geometria, rispondeva: *Rira bien qui rira le dernier.* Gran meraviglia! un cieco ha trovato un ferro da cavallo.

FINE.







